

Украинский научно-исследовательский гидрометеорологический институт

Прусов В.А., Гук Л.Н., Черныш Р.И.

Метод реализации математической модели циркуляции атмосферы

Киев – 2010

В современной науке климатические, метеорологические, экологические и другие прогнозы тесно связаны с математическим моделированием циркуляции атмосферы. Решение большинства метеорологических задач базируется на реализации сложнейших математических моделей, основу которых составляют следующие гидродинамические уравнения:

сохранения массы

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0; \quad (1)$$

сохранения количества движения

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nabla \cdot (\nu \mathbf{V}); \quad (2)$$

распространения тепла

$$\frac{d\theta}{dt} = \nabla \cdot (k_T \nabla \theta - F_{rad}) - \frac{L_v}{c_p} Q_H; \quad (3)$$

распространения удельной влажности

$$\frac{dq}{dt} = \nabla \cdot (k_d \nabla q) + Q_H; \quad (4)$$

распространения удельной водности

$$\frac{d\delta}{dt} = \nabla \cdot (k_d \nabla \delta) - Q_H; \quad (5)$$

распространения концентраций примесей

$$\frac{ds}{dt} = \nabla \cdot (k_d \nabla s) + Q_s; \quad (6)$$

состояния

$$p = R\rho T. \quad (7)$$

Рассмотрим систему уравнений Навье-Стокса, тепло- и массопереноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^3 \left(V^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} M^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) = f$$

Введем пространственные операторы

$$\Lambda_{\alpha} = V^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} M^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$$

Тогда система уравнений примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda u = f \quad (8)$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$$

Модифицированное аддитивно-усредненное расщепление

$$\frac{y_{\alpha}^{qm+s+1} - y_{\alpha}^{qm+s}}{3\tau} + \left(B_{\alpha} y_{\alpha}^{qm+s+1} + A_{\alpha} y_{\alpha}^{qm+s} \right) = \varphi_{\alpha}^{qm+s} = \frac{f^{qm+s}}{3}, \quad (9)$$

$$y_k^{qm} = y^{qm}, \quad y_k^0 = u^0,$$

$$y_k^{qm+s+1} = u^{qm+s+1}, \quad x \in \gamma_h, \quad s = 0, \dots, m-1,$$

$$y^{qm+m} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 y_{\alpha}^{qm+m}, \quad x \in \omega_h / \gamma_h,$$

где $\alpha = 1, 2, 3$, $q = 1, 2, \dots, Q$, $N = Qt$, $m \geq 1$ – параметр схемы,

$B_{\alpha} u_{\alpha}^{qm+s+1} + A_{\alpha} u_{\alpha}^{qm+s}$ аппроксимирует $\Lambda_{\alpha} u$ в некоторой точке временного интервала.

Преимущества МАУМ

- МАУМ сохраняет простоту организации вычислений адитивно-усредненного метода.
- МАУМ уменьшает информационную зависимость между подзадачами (в зависимости от значения параметра m), что повышает эффективность его параллельной реализации, т.е. уменьшает временные затраты на решение задачи.

Недостатки МАУМ

- Первый порядок точности.
- Практически целесообразно использовать параллельную реализацию.

Особенности, влияющие на качество и стоимость численного прогноза

- Параболические нестационарные уравнения Навье-Стокса переходят в гиперболические нестационарные уравнения Эйлера при стремлении коэффициента диффузии к нулю, что характерно для свободной атмосферы. Вырождение уравнения может привести к некорректности в постановке задачи и к вычислительным проблемам при решении.
- Изменение всех метеорологических величин в пространстве и во времени, многократная перемена знака скорости конвекции в пределах расчетной области создают дополнительные трудности при решении задачи.
- Также значительным усложнением численной реализации метеорологических моделей является нелинейность гидродинамических уравнений.
- Дополнительные данные, которые необходимы для задания начальных и краевых условий, имеют значительные неустранимые ошибки, а модельные уравнения описывают лишь часть взаимодействий и процессов на некотором уровне адекватности. Этот факт не позволяет повысить точность прогнозов, заменяя лишь численные алгоритмы на более точные.
- Также следует учитывать, что задачи прогнозирования ограничены во времени, т.е. прогноз необходимо получить к определенному времени.

Преимущества и недостатки конечно-разностных методов решения уравнений конвективной диффузии

- **Явные методы:**

“+” – простота алгоритма применения и незначительные затраты времени на реализацию;

“-” – жесткое ограничение на временной шаг как следствие условной устойчивости;

“-” – решение во внутренних точках не зависит от граничных условий.

- **Неявные методы:**

“+” – безусловная устойчивость (нет ограничений на шаги сетки);

“-” – сложная реализация и, как следствие, увеличение временных затрат (особенно в случае применения итераций);

“-” – проблемы при решении уравнений вырожденного типа.

Решение трехмерного уравнения конвективной диффузии (8) с помощью МАУМ сводится к решению множества одномерных задач типа:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + (By_i^{n+1} + Ay_i^n) = \varphi_i^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, J-1, \quad (10)$$

$$y^0 = u^0, \quad i = 0, \dots, J, \quad y_0^{n+1} = u_0^n, y_N^{n+1} = u_N^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \frac{v_i^+}{2} \left(\frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h} + \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} \right) + \frac{v_i^-}{2} \left(\frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} + \frac{y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}}{h} \right) - \\ - \left(a_{i+1}^+ \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h^2} - a_i^+ \frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) - \left(a_{i+1}^- \frac{y_{i+1}^{n+1} - y_i^{n+1}}{h^2} - a_i^- \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h^2} \right) = \varphi_i^n, \end{aligned} \quad (11)$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, J-1,$$

$$y^0 = u^0, \quad i = 0, \dots, J, \quad y_0^{n+1} = u_0^n, y_N^{n+1} = u_N^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$v_i^+ = \frac{v_i + |v_i|}{2}, \quad v_i^- = \frac{v_i - |v_i|}{2}, \quad a_i^+ = \begin{cases} \frac{\mu_{i-1} + \mu_i}{2}, & v_i \geq 0, \\ 0, & v_i < 0. \end{cases} \quad a_i^- = \begin{cases} 0, & v_i \geq 0, \\ \frac{\mu_{i-1} + \mu_i}{2}, & v_i < 0. \end{cases}$$

Преимущества схемы явного счета

- В данной схеме на верхнем слое разности направлены против потока, благодаря чему возмущения не могут распространяться в направлении, противоположном физической конвекции. Соответственно, волны нефизической природы не должны искривлять численное решение.
- Схема явного счета (11) позволяет строить решение последовательно для точек сетки в порядке возрастания или убывания индекса по алгоритму реализации явных схем. Такая организация счета дает возможность минимизировать машинное время решения задачи.
- При этом метод является по сути неявным и абсолютно устойчивым.
- При вычислении учитывается вся имеющаяся на данный момент времени информация.
- При аппроксимации гидродинамических уравнений коэффициенты в конвективных членах берутся с нижнего временного слоя, что позволяет избежать нелинейную неустойчивость и необходимость итераций.

Недостатки схемы явного счета

- Ограничения на временной шаг накладываются условной аппроксимацией и скоростью изменения переменных коэффициентов (это является менее обременительно, чем в случае использования явных схем).
- Схема условно монотонна.
- Порядок точности схемы равен $O\left(\tau + \frac{\tau}{h} + h^2\right)$ (необходимая точность достигается за счет уменьшения временного шага).

Упрощенная модель циркуляции свободной атмосферы для макромасштабных процессов

- уравнение движения для компонент скорости

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\rho \mu_{\lambda\varphi}}{(a \cos \varphi)^2} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\rho \mu_{\lambda\varphi}}{a^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \mu_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + (v \sin \varphi - w \cos \varphi) \left(2\omega + \frac{u}{a \cos \varphi} \right); \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\rho \mu_{\lambda\varphi}}{(a \cos \varphi)^2} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\rho \mu_{\lambda\varphi}}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \mu_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left(2\omega + \frac{u}{a \cos \varphi} \right) \sin \varphi - \frac{wv}{a}; \quad (13)$$

- уравнение для вертикальной компоненты скорости (упрощенное уравнение неразрывности)

$$w_k = w_{k-1} - \frac{\Delta z}{2a} (L_{k-1} + L_k); \quad (14)$$

- уравнение состояния для вычисления плотности $p = \rho R_c T$; (15)

- уравнение теплообмена в предположении несжимаемости среды

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\rho \mu_{\lambda\varphi}}{(a \cos \varphi)^2} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\rho \mu_{\lambda\varphi}}{a^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \mu_z \frac{\partial T}{\partial z} \right); \quad (16)$$

- горизонтальный коэффициент турбулентности

$$\mu_{\lambda\varphi} = \sigma \left(k_0 + 0.08a (\Delta \lambda^2 \cos^2 \varphi + \Delta \varphi^2) \sqrt{D_1^2 + D_2^2} \right) \quad (17)$$

- коэффициент вертикального турбулентного обмена

$$\mu_z = (b\chi)^2 \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2} \quad (18)$$

Для постановки начально-краевых условий модели использовался электронный архив данных объективного анализа полей метеорологических величин немецкой метеорологической службы Offenbach.

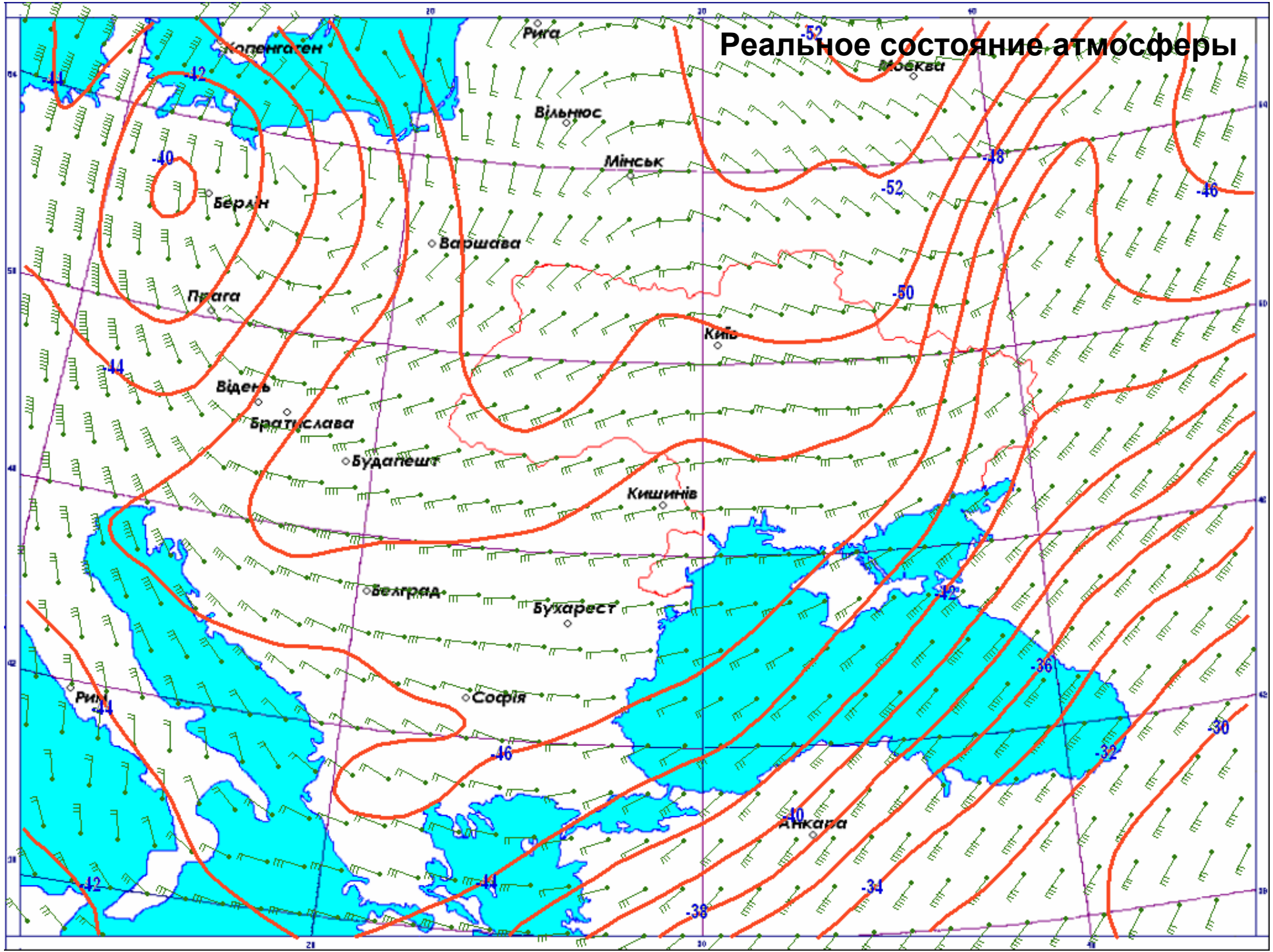
В основу алгоритма решения задачи положен МАУМ, по координатной декомпозиции расчетной области для распараллеливания вычислений и метод явного счета.

Программная реализация модели производилась на языке C++, распараллеливание – функциями и директивами OpenMP.

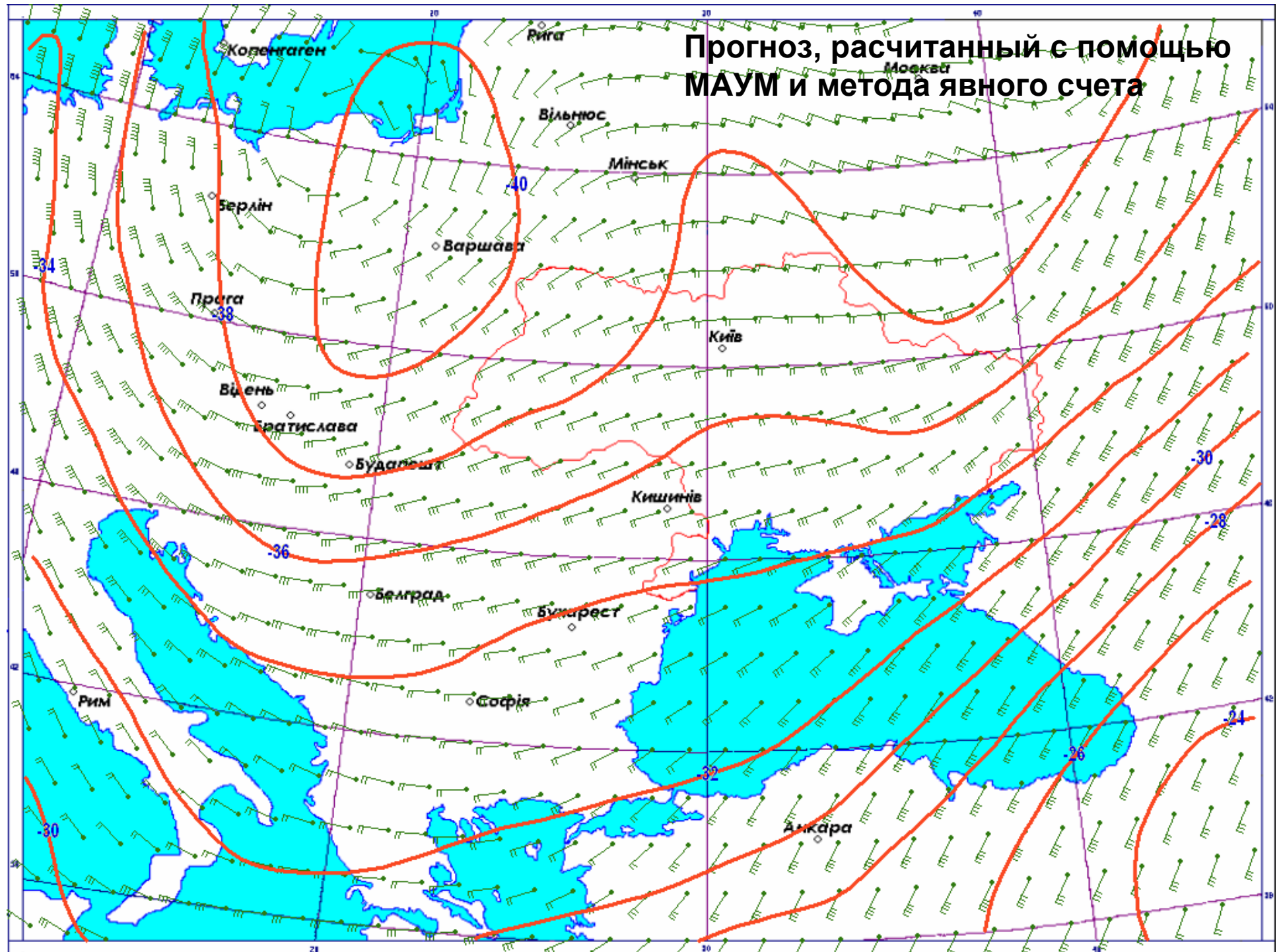
Проведен ряд численных экспериментов при следующих параметрах:
количество узлов горизонтальной сетки – 181 (0.5 град); количество узлов вертикальной сетки – 10 (1000 м); временной шаг = 10 сек;
расчетное время – 24 часа.

Результаты для высоты 10 км изображены на следующих двух рисунках. Здесь приняты такие обозначения: изолинии температуры проведены через 2 °С; одна черта на стрелке соответствует скорости ветра 10 м/с.

Реальное состояние атмосферы



Прогноз, рассчитанный с помощью МАУМ и метода явного счета



Количество подобластей декомпозиции s и m -параметр МАУМ варьировались. По результатам экспериментов построен график зависимости временных затрат от этих параметров (рис. 2).

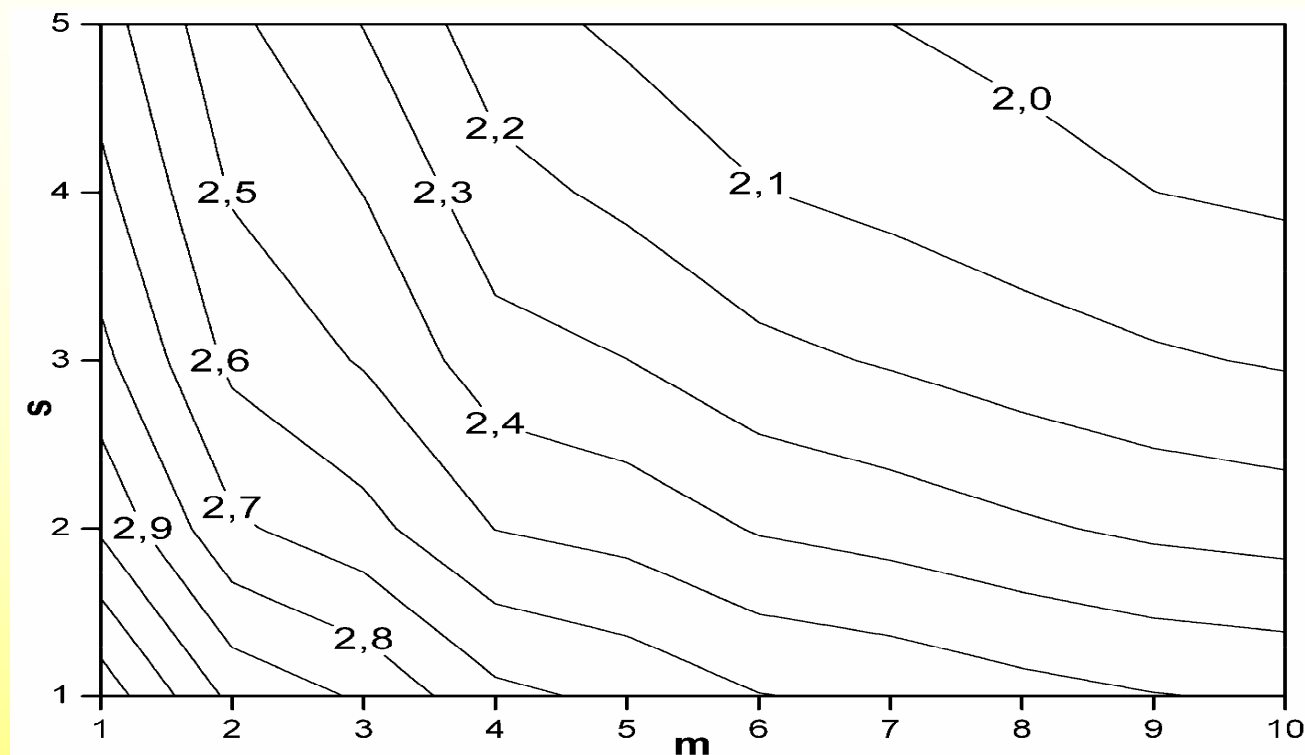


Рисунок 2. Зависимость временных затрат ($\lg \theta$) на параллельном участке алгоритма от параметра МАУМ и количества подобластей в декомпозиции s .

Анализ влияния s и m -параметров алгоритма на время решения задачи показал, что при относительно малой потере точности решения возможно ощутимое уменьшение его временной стоимости. Таким образом, практически показана целесообразность и эффективность применения метода к решению климатических, экологических и метеорологических задач.

Выводы

- *предложен новый метод реализации трехмерных уравнений, составляющих основу прогностических моделей. Метод заключается в применении модифицированного аддитивно-усредненного метода расщепления и конечно-разностного метода явного счета для решения одномерных задач конвективной диффузии;*
- *обоснована целесообразность применения предложенного метода к решению климатических, экологических и метеорологических задач. Данный метод является экономичным, учитывает особенности моделирования атмосферы и адаптирован к современным вычислительным технологиям;*
- *реализована упрощенная модель циркуляции свободной атмосферы для макромасштабных процессов. Проведенный анализ показал эффективность метода.*

Таким образом, можно сделать вывод, что предложенный метод применим для реализации математических моделей циркуляции атмосферы. Его использование для климатического, экологического и метеорологического прогнозирования позволит улучшить точность этих прогнозов без увеличения временных затрат на их получение.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Список использованной литературы

- Hoffman J. D. 2001. Numerical methods for engineers and scientists. New York: Basel. 829 p.
- Smagorinski J., 1963. General circulation experiment with the primitive equations: Part I. The basic experiment. *Monthly Weather Review* 1: 99–164.
- Абрашина-Жадаева Н.Г., Романова Н.С., 2006. Многокомпонентные векторные схемы расщепления для решения многомерных задач математической физики. *Дифференциальные уравнения* 7: 883–894.
- Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р., 1990. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2-х томах. Москва: Мир. Т.2. 726 с.
- Гордезиани Д.Г., Меладзе Г.В., 1974. О моделировании третьей краевой задачи для многомерных параболических уравнений в произвольной области одномерными уравнениями. *Журнал вычислительной математики и математической физики* 1:246–250.
- Гук Л. М., 2008. Стійкість та збіжність економічного методу розв'язання одновимірної задачі конвективної дифузії. *Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки* 4: 115 - 118.
- Дымников В.П., Лыкосов В.Н., Володин Е.М., 2006. Проблемы моделирования климата и его изменений. *Известия РАН. Физика атмосферы и океана* 5: 618-636.
- Марчук Г. И., 1988. Методы расщепления. Москва: Наука. 264 с.
- Прусов В. А., Дорошенко А. Ю., 2006. Моделювання природних і техногенних процесів в атмосфері. Київ: Наукова Думка, 542 с.
- Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., Гук Л.Н., 2007. Эффективная разностная схема численного решения задачи конвективной диффузии. *Кибернетика и системный анализ* 3: 64 – 74.
- Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., 2009. Метод численного решения многомерной задачи конвективной диффузии. *Кибернетика и системный анализ* 1: 100–107.
- Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.И., 2009. Выбор параметра модифицированного аддитивно-усредненного метода. *Кибернетика и системный анализ* 4: 98–105.
- Толстых М.А., Фролов А.В., 2005. Некоторые современные проблемы численного прогноза погоды. *Известия РАН. Физика атмосферы и океана* 3: 315-327.
- Федоренко Р. П., 1991. Жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений и их численное интегрирование. *Вычислительные процессы и системы* 8: 328-380.
- Черниш Р. І., 2009. Паралельна реалізація моделі макромасштабної циркуляції. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка: серія фізико-математичні науки* 2: 155–158.
- Шлихтинг Г., 1974. Теория пограничного слоя. Москва: Наука. 712 с.